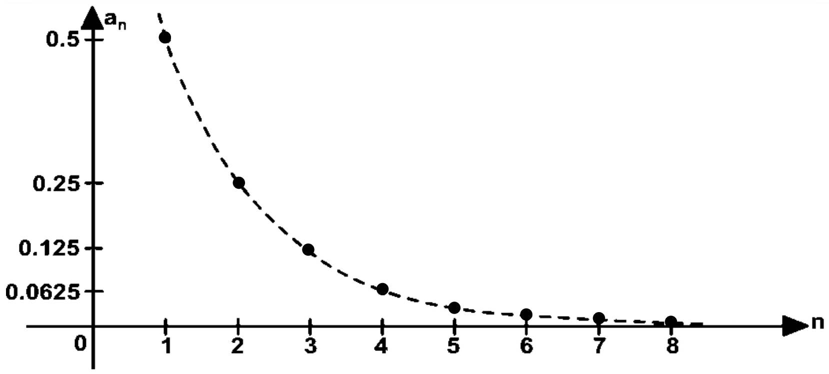
บทที่ 1
ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

1.2 ลิมิตของลำดับอนันต์

(1) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ ดังต่อไปนี้

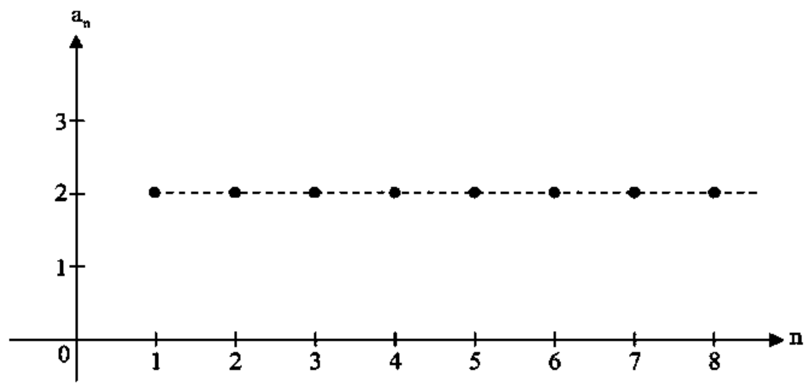
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	...



จากกราฟจะเห็นว่า ถ้า n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n มีค่าลดลงและเข้าใกล้ 0 แต่จะไม่เท่ากับ 0

หมายเหตุ เส้นประที่ปรากฏในกราฟเป็นเส้นที่ใช้เพื่อแสดงให้เห็นแนวของจุด ไม่ใช่ส่วนหนึ่งของกราฟ

(2) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 2$ ดังต่อไปนี้



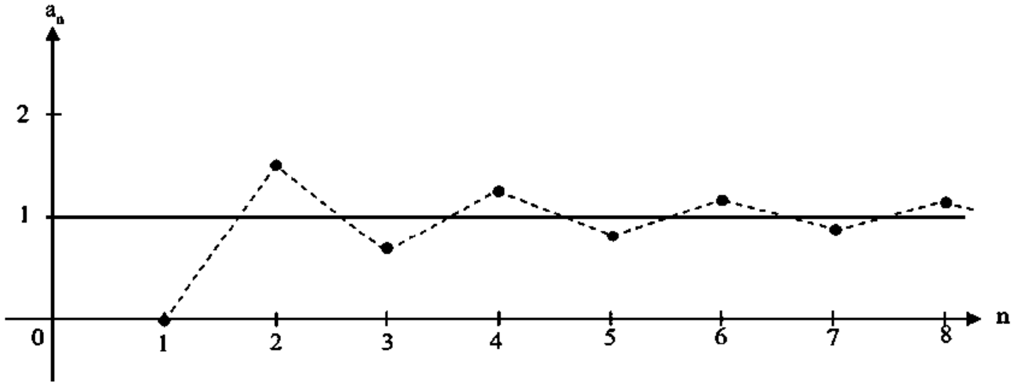
จากกราฟจะเห็นว่า a_n มีค่าเป็น 2 เสมอ สำหรับทุกค่าของ n

เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นแล้ว เรียก L ว่า **ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence)** และกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า **ลำดับลู่เข้า** (convergent sequence)

จากตัวอย่างข้างต้นจะได้ว่า ลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ เป็นลำดับลู่เข้า มีลิมิตเท่ากับ 0 และลำดับ $a_n = 2$ เป็นลำดับลู่เข้า มีลิมิตเท่ากับ 2

(3) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ ดังต่อไปนี้

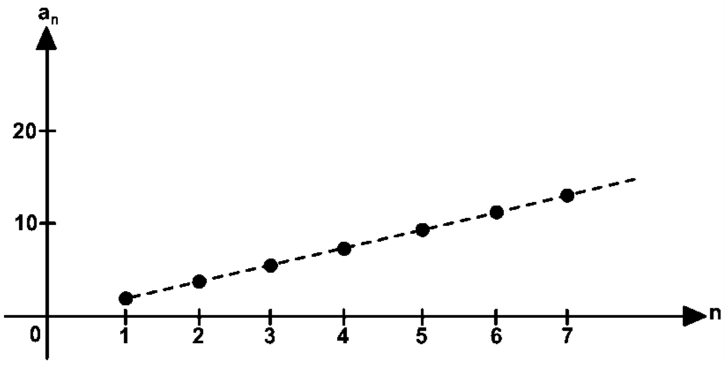
n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
a_n	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{8}$	…



จากกราฟจะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้เส้นทึบที่ปรากฏ ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้ 1 แต่จะไม่เท่ากับ 1

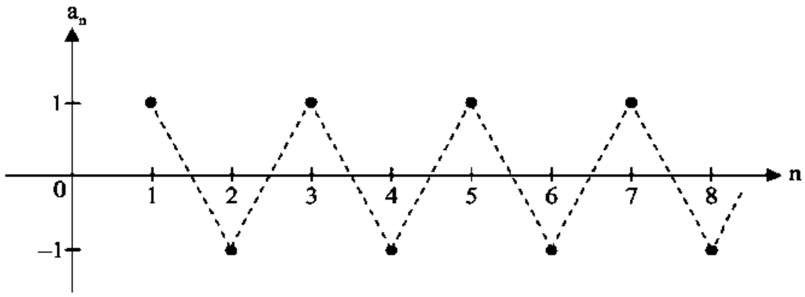
ดังนั้น ลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นลำดับลู่เข้าและมีลิมิตเท่ากับ 1

(4) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 2n - 1$ ดังต่อไปนี้



จากกราฟจะเห็นว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะมีค่ามากขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง จึงกล่าวได้ว่า ลำดับ $a_n = 2n - 1$ ไม่มีลิมิต ลำดับนี้จึงไม่ใช่ลำดับลู่เข้า เรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้าว่า **ลำดับลู่ออก** (divergent sequence)

(5) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}$ ดังต่อไปนี้



จากกราฟจะเห็นว่า เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ พจน์ที่ n จะเท่ากับ 1 และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ พจน์ที่ n จะเท่ากับ –1 ดังนั้น เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจึงไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง ลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}$ จึงไม่มีลิมิต ดังนั้น ลำดับนี้จึงเป็นลำดับลู่ออก และเรียกลำดับลู่ออกที่มีลักษณะของกราฟขึ้นและลงสลับกันโดยไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่งว่า **ลำดับแกว่งกวัด (oscillating sequence)**

สำหรับลำดับลู่ออก ถ้าพิจารณาลำดับจากการเขียนกราฟจะแบ่งออกเป็น 3 ประเภท คือ

1) ลำดับลู่ออกซึ่งพจน์ที่ n มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด
2) ลำดับลู่ออกซึ่งพจน์ที่ n มีค่าลดลงเรื่อย ๆ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด
3) ลำดับลู่ออกซึ่งมีลักษณะแตกต่างจากลำดับในข้อ 1) และ 2) ซึ่งเรียกว่า ลำดับแกว่งกวัด

ลิมิตของลำดับ

1. ลำดับที่จะนำมาพิจารณาลิมิตนั้นต้องเป็นลำดับอนันต์
2. ถ้ากล่าวว่า L เป็นลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น a_n หมายถึง เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L)
3. ลำดับอนันต์ที่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่เข้า ส่วนลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่ออก
4. การพิจารณาว่าลำดับใดจะมีลิมิตหรือไม่นั้น อาจทำได้โดยการพิจารณาจากกราฟของลำดับเมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

ตัวอย่างที่ 1 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = n^2$ โดยการวาดกราฟ

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{5}{n^3}$ โดยการวาดกราฟ

วิธีทำ

แบบฝึกหัดที่ 4

ชื่อ – สกุล .... ชั้น .... เลขที่ ....

จงเขียนกราฟเพื่อตรวจสอบดูว่าลำดับในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n										

2. $a_n = \frac{5}{n+1}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n								

3. $a_n = \frac{2^n}{n}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n								

4. $a_n = n(1+(-1)^n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n										

5. $a_n = 4 - \frac{1}{2^n}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n								

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าลำดับ $a_n = \frac{1}{n}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า ให้บอกด้วยว่าลิมิตของลำดับนี้เป็นเท่าใด

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาว่าลำดับ $a_n = n^3$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า ให้บอกด้วยว่าลิมิตของลำดับนี้เป็นเท่าใด

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาว่าลำดับ $a_n = \frac{1}{n^2}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า ให้หาลิมิตด้วย

วิธีทำ

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ r เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จะได้ว่า

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} n^r$ หาค่าไม่ได้

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ r เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$
2. ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} r^n$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = 2^n$

วิธีทำ

ทฤษฎีบทที่ 3 ให้ a_n, b_n, t_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้ว่า

1. ถ้า $t_n = c$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$
2. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = cA$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A + B$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A - B$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = AB$
6. ถ้า $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = 4$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 8 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{4}{n}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 9 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{1+3n^2}{n^2}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 10 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{4-3n+n^2}{2n^3-3n^2+5}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 11 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{3n+8}{n^2+n+4}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 12 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{n^3}{n^2+n+4}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 13 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2-3}$

วิธีทำ

ทฤษฎีบทที่ 4 ให้ a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 และ m เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \sqrt{\dfrac{4n-1}{n+1}}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 15 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{\sqrt{5n^2+1}}{7n+4}$

วิธีทำ

เราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตที่กล่าวมาแล้ว ในการพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 16 จงพิจารณาว่าลำดับ $a_n = \dfrac{3+2n}{n}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 17 จงพิจารณาว่าลำดับ $b_n = \frac{3n^3 - n}{5n^3 + 17}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 18 จงพิจารณาว่าลำดับ $c_n = \sqrt[5]{\frac{n^2 - 4n}{32n^2 - 3n}}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

สรุปวิธีพิจารณาว่าลำดับใดเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีที่ 1 พิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกจากกราฟของลำดับ

1) ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด แล้วทำให้ a_n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียว ลำดับนั้นจะเป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตของลำดับเท่ากับ L

2) ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด แล้วทำให้ a_n เข้าใกล้จำนวนจริงมากกว่า 1 ค่า หรือทำให้ a_n มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขอบเขต ลำดับนั้นจะเป็นลำดับลู่ออก และไม่มีลิมิต

วิธีที่ 2 พิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกโดยใช้ทฤษฎีบทของลิมิต

วิธีนี้ใช้แนวคิดจากบทนิยามที่กล่าวว่า “ลำดับอนันต์ที่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่เข้า” และ “ลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่ออก”

ข้อสังเกตเกี่ยวกับลิมิตของลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนพหุนาม

1. ถ้าเลขชี้กำลังสูงสุดของพหุนามที่เป็นตัวเศษเท่ากับเลขชี้กำลังสูงสุดของพหุนามที่เป็นตัวส่วน แล้ว ลิมิตของลำดับจะเท่ากับสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวเศษหารด้วยสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวส่วน
2. ถ้าเลขชี้กำลังสูงสุดของพหุนามที่เป็นตัวเศษน้อยกว่าเลขชี้กำลังสูงสุดของพหุนามที่เป็นตัวส่วน แล้ว ลิมิตของลำดับจะเท่ากับศูนย์
3. ถ้าเลขชี้กำลังสูงสุดของพหุนามที่เป็นตัวเศษมากกว่าเลขชี้กำลังสูงสุดของพหุนามที่เป็นตัวส่วน แล้ว ลำดับนั้นจะไม่มีลิมิต

จากข้อสังเกตเกี่ยวกับลิมิตของลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนพหุนามข้างต้น เราสามารถหาลิมิตของลำดับด้วยวิธีลัด ได้ดังนี้

การหาลิมิตของลำดับด้วยวิธีลัด

1. ทำให้ตัวเศษและตัวส่วนในพจน์ที่ n มีตัวแปรกำลังสูงสุดเท่ากัน
2. ค่าลิมิต $= \dfrac{\text{สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวเศษ}}{\text{สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวส่วน}}$

แบบฝึกหัดที่ 5

ชื่อ – สกุล .... ชั้น .... เลขที่ ....

1. จงใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับเพื่อตรวจสอบว่าลำดับในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1) $a_n = \frac{8}{3n}$

2) $a_n = \frac{8^n}{7^n}$

3) $a_n = (-1)^n$

4) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

5) $a_n = 4 + \frac{1}{n}$

6) $a_n = \frac{7n^2}{5n^2 - 3}$

7) $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$

8) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 - 1}}{4n}$

9) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n+1} - 2}{n}$

10) $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 - 1}}{2n + \sqrt[3]{n^3 + 2}}$

2. จงหาลิมิตของลำดับในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $a_n = \dfrac{6n-4}{6n}$ ....

2) $a_n = \dfrac{3n+5}{6}$ ....

3) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ....

4) $a_n = \dfrac{4+5n}{n^2}$ ....

5) $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$ ....

6) $a_n = \dfrac{3n^2-5n}{7n-1}$ ....

7) $a_n = \dfrac{4n^2-2n+3}{n^2}$ ....

8) $a_n = \dfrac{3n^2-1}{10n-5n^2}$ ....

9) $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ ....

10) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ ....

11) $a_n = \dfrac{8n^2+5n+2}{3+2n}$ ....

12) $a_n = \dfrac{\sqrt{5}n^3+4n^2-1}{2n^3-n+3}$ ....

13) $a_n = \left(\dfrac{2n-5}{n+1}\right)^5$ ....

14) $a_n = \dfrac{\sqrt{10n^2+1}}{n-1}$ ....

15) $a_n = \dfrac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt[4]{16n^4+5}}$ ....

16) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-n}$ ....

3. กำหนดลำดับ $a_n = \dfrac{2n^4 - n^2}{3n^4 + 13}$ จงให้เหตุผลว่า นักเรียนเห็นด้วยหรือไม่กับวิธีการหาลิมิตของลำดับ a_n ที่แสดงไว้ในกรอบต่อไปนี้

> โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4 - n^2}{3n^4 + 13} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 2n^4 - n^2}{\lim\limits_{n\to\infty} 3n^4 + 13}$
>
> แต่เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} (2n^4 - n^2)$ หาค่าไม่ได้ และ $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^4 + 13)$ ก็หาค่าไม่ได้
>
> ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4 - n^2}{3n^4 + 13}$ จึงหาค่าไม่ได้

....

....

4. ประโยคต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ จงให้เหตุผล

   1) ถ้า a_n และ b_n เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $(a_n + b_n)$ เป็นลำดับลู่ออก

   2) ถ้า a_n เป็นลำดับลู่เข้า และ b_n เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $(a_n + b_n)$ เป็นลำดับลู่ออก

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ความรู้เพิ่มเติม

ลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับเลขคณิต

ลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับเลขคณิตจะอยู่ในรูป $a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots$ เมื่อ d คือผลต่างร่วม และ $a_n = a_1+(n-1)d$

กรณีที่ 1 ถ้า $d=0$ จะได้ $a_n = a_1$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 = a_1$

แสดงว่า ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเท่ากับ a_1

กรณีที่ 2 ถ้า $d \neq 0$ จะได้ $a_n = a_1+(n-1)d = \dfrac{a_1+n^1d-d}{n^0}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+n^1d-d}{n^0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้

แสดงว่า ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่ออก

สรุปได้ว่า

> สำหรับลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับเลขคณิตที่อยู่ในรูป $a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots$
>
> (1) ถ้า $d=0$ แล้ว ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเท่ากับ a_1
>
> (2) ถ้า $d \neq 0$ แล้ว ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่ออก

ลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับเรขาคณิต

ลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับเรขาคณิตจะอยู่ในรูป $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots$ เมื่อ r คืออัตราส่วนร่วม และ $a_n = a_1r^{n-1}$

กรณีที่ 1 ถ้า $-1<r<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1r^{n-1} = 0$

แสดงว่า ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเท่ากับ 0

กรณีที่ 2 ถ้า $r=1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1r^{n-1} = a_1$

แสดงว่า ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเท่ากับ a_1

กรณีที่ 3 ถ้า $r \le -1$ หรือ $r>1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1r^{n-1}$ หาค่าไม่ได้

แสดงว่า ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่ออก

สรุปได้ว่า

> สำหรับลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots$
>
> (1) ถ้า $-1<r<1$ แล้ว ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเท่ากับ 0
>
> (2) ถ้า $r=1$ แล้ว ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเท่ากับ a_1
>
> (3) ถ้า $r \le -1$ หรือ $r>1$ แล้ว ลำดับอนันต์นี้เป็นลำดับลู่ออก

ความรู้เพิ่มเติม

ถ้า $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับอนันต์ ซึ่งแต่ละพจน์มีเครื่องหมายบวกและลบสลับกันแล้ว

(1) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$ แล้ว ลำดับอนันต์นี้จะเป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

(2) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = L$ โดยที่ $L \neq 0$ แล้ว ลำดับอนันต์นี้จะเป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าลำดับ $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{2n+1}{3n-8}\right)$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|a_n| &= \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n-8}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-8} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{2n+1}{3n-8}\right)$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาว่าลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n-5}{3n^2+4}\right)$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|a_n| &= \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{2n-5}{3n^2+4}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n^2+4} \\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n-5}{3n^2+4}\right)$ เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเท่ากับ 0